Chapitre III

Dynamique du point matériel

III-1 Introduction:

III-1-1 Les lois de Newton:

En 1682, Newton découvre les lois du mouvement et de la gravitation, On peut les énoncer de la manière suivante:

a) 1ère loi d'inertie de Galilée:

Toute particule isolée sur laquelle n'agit aucune force reste au repos ou est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.

b) 2ème loi ou relation fondamentale de la dynamique:

La force $\vec{F}$ appliquée à une particule est égale au produit de sa masse d'inertie par son accélération $\vec{\gamma}$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

c) 3ème loi ou principe de l'action et de la réaction

Quand un point matériel (1) exerce sur un point matériel (2) une force $\vec{F}_{12}$, le point (2) exerce sur (1) la force opposée $\vec{F}_{21}$.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

d) 4ème loi de gravitation

Deux particules de masse m et M s'attirent avec une force dirigée le long de la droite qui les relie, cette force varie comme l'inverse du carré de la distance et elle est proportionnelle aux deux masse,

$$|\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}, \qquad \text{avec} \qquad G = 6{,}67.10^{-11}\,Nm^2Kg^2$$

III-1-2 repère Galiléen:

Définition du repère de Copernic

C'est un repère dont le sommet O coincide avec le centre de masse du système solaire. les axes du repère sont orientés sur les 3 étoiles de notre galaxie.

On appelle repère Galiléen tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic.

La force qui s'exerce sur un point matériel de masse m mesurée dans un repère Galiléen (G_1) est la même dans tout autre repère Galiléen (G_2).

$$\vec{F}_{G_1} = \frac{d\left(m\vec{V}_{G_1}\right)}{dt} \qquad \vec{F}_{G_2} = \frac{d\left(m\vec{V}_{G_2}\right)}{dt}$$

$$\vec{F}_{G_1} = \vec{F}_{G_2}$$

III-1-3 Limitation des loi de Newton

a- Les lois de Newton ne sont pas valables dans les repères autres que les repères Galiléen.

En particulier pour des repères accélérés par rapport au repère de Copernic, les lois de Newton ne sont pas valables. Dans ce dernier cas, il faut tenir compte des forces d'inertie.

b- Limitation:

Lorsque le point matèriel est animé d'une grande vitesse à partir du $100^{ième}$ de la vitesse de la lumière, la mécanique classique n'est plus valable et la force appliquée au point matérièl s'écrit sous la forme.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

mais m n'est plus une constante, m dépent de la vitesse.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \qquad m = m(v) \quad V = V(t)$$

C : la vitesse de la lumière

m_0 : masse de la particule au repos

En mécanique relativiste, les forces mesurées dans les deux repère (Galiléen) ne sont pas les mêmes.

III-2 Notion de travail:

Considérons un point matériel décrivant une courbe (C) dans un repère Galiléen,

$\vec{F}$= fonction vectorielle $\vec{F} = \vec{F}(r)$; $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Le travail effectué par la force $\vec{F}$ entre les points (1) et (2) ,

$W_1^2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.\vec{dr}$,c'est la circulation de F le long de C entre (1) et (2)

dW= travail élémentaire effectué par la force entre 2 points infiniment rapproché.

$dW = \vec{F}.\vec{dr}$ $\quad$ $dW > 0$ travail moteur
$dW < 0$ travail résistant
$dW = 0$ F est perpendiculaire au déplacement

La puissance fournie au point M par la force pendant l'intervalle de temps dt est.

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

$$W_1^2 = \int_1^2 \vec{F}.\vec{dr} \qquad \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad \vec{dr} = \vec{V}.dt$$

$$W_1^2 = \int_1^2 \frac{d(m\vec{V})}{dt}.\vec{V}dt = \int_1^2 d(m\vec{V}).\vec{V} = \int_1^2 md\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$W_1^2 = \int_1^2 \frac{m}{2} d(V^2) = \frac{m}{2}\left[V_2^2 - V_1^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2} mV^2 \quad \text{énergie cinétique}$$

$$\boxed{W_1^2 = T_2 - T_1}$$

C'est l'expression du théorème de l'énergie cinétique, travail de la force entre 2 points est égal à la différence de l'énergie cinétique $T_2 - T_1$ entre les deux instants occupant les deux positions.

III-3 Energie potentielle:

Considérons un champ de force $\vec{F}(r)$qui dérive d'un potentiel *scalaire* $\vec{F}(r) = -\vec{grad}\mathbf{V} = -\vec{\nabla}.\mathbf{V}$

$$\vec{\nabla}.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

$\boldsymbol{V}$ est appelé le potentiel scalaire d'où dérivé la force $\vec{F}$.

On l'appelle aussi énergie potentielle du point M plongé dans le champ de force $\vec{F}$.

Calculons le travail fourni par la force entre les positions (1) et (2)

$$W_1^2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{r} = -\int(\vec{\nabla}.\boldsymbol{V})d\vec{r} = -\int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial v}{\partial x}.dx + \frac{\partial v}{\partial y}.dy + \frac{\partial v}{\partial z}.dz = -\int_{(1)}^{(2)} d\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$$

V_1 et V_2 dépendent uniquement de la position (1) et la position (2), le travail fourni dépend du point de départ et du point d'arrivé.

W ne dépend pas du chemin suivi entre (1) et (2)

$$W_2^1 = V_1 - V_2$$

C'est un théorème valable pour les forces qui dérivent d'un potentiel scalaire.

$\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire $\Leftrightarrow \quad \vec{rot}\vec{F} = \vec{0}$

Rq lorsque $\vec{rot}\,\vec{F} \neq \vec{0}$ on ne peut pas définir l'énergie potentielle

III-4 Energie totale

Dans un champ conservatif:

$$W_1^2 = T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$
$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = T_i + V_i = cte$$

Cette constante est appelée énergie mécanique totale au point plongé dans le champ de force $\vec{F}$.

- **Impulsion**

l'impulsion de la force F entre les instants t_1 et t_2 corespondant aux positions (1) et (2) est par définition:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(m\vec{v})}{dt}.dt = \int_{t_1}^{t_2} d(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

l'impulsion entre t_1 et t_2 est égale à la différence des quantités de mouvements (Théorème toujours valable).

III-5 Théorème de moment cinétique:

Couple de la force par rapport à O : $\vec{F}/O$:,
O étant un point fixe qui peut être l'origine du repère fixe.

On appelle couple de la force F/O ou encore moment de la force $\vec{F}/O$ la quantité vectorielle.

$$= \vec{M}(O,\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Calculons la quantité

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + r \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

or $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $donc \quad \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\Gamma}$$

$\vec{L}(O,\vec{F}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ =moment cinétique

$\vec{M}(O,F) = \frac{d\vec{L}(O,F)}{dt}$ Théorème du moment cinétrique.

Conservation de la quantité du mouvement

Lorsque aucune force ne s'exerce sur le point matériel càd lorsque

$$\vec{F} = \vec{O} \qquad \left.\frac{d(m\vec{v})}{dt}\right|_R = 0 \qquad m\vec{v} = \vec{cte}$$

La quantité de mouvement se conserve quand le point n'est soumis à aucune force.

Lorsque le moment de la force, $\vec{\Gamma} = O$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \vec{L}(O,\vec{F}) = \vec{cte} \qquad \text{= moment cinétique se conserve}$$

III-6 Equilibre d'un point matériel

Un point matériel est en équilibre si la force résultante appliquée est nulle. Donc s'il est plongé dans un champ de force qui dérive d'un potentiel scalaire, on doit donc écrire.

$$\vec{F} = 0, \vec{F} = -\vec{\nabla}.V = \vec{0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{dont } V \text{ extrêmal.}$$

Equilibre stable et instable

L'équilibre est stable si V est minimal, il est instable lorsque V est maximal.

III-7 Applications:

* Dans un champ de force uniforme vertical

$$\vec{F} = -F_0.\vec{e}_z \qquad F_0 > 0$$

$$\vec{F} = \left.\frac{d(m\vec{v})}{dt}\right|_R = m\vec{\gamma}(M|_R)$$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = -F_0.\vec{e}_z$$

$$\vec{\gamma} = -F_0.\vec{e}_z = \vec{cte}$$

Dans ce champ de force uniforme l'accélération est une constante.On dit que le mouvement est uniformément varié.

* cas particulier du mouvement rectiligne.

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x \quad ; \quad \vec{v}(M\|_R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right\|_R = \dot{x}\vec{e}_x \quad ; \quad \vec{\gamma}(M\|_R) = \ddot{x}\vec{e}_x$$

$$\vec{F} = F_0.\vec{e}_x \quad ; \quad F_0 > 0 \quad ou \quad F_0 < 0$$

à $t = 0$ $\quad x = 0 \quad \vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x \qquad ;(v_0 > 0)$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_R = F_0.\vec{e}_x = m\frac{dv}{dt}\Big|_R.\vec{e}_x$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \to mv = F_0 t + C_1$$

$$mv_0 = C_1 \to mv = F_0 t + mv_0$$

$$mx = ½ F_0 t^2 + mv_0 t + C_2 \to C_2 = 0$$

$$x = (F_0 / 2m)t^2 + v_0 t$$

ce mouvement est uniformément accéléré lorsque $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$,, sont de même signe(,$\vec{\gamma}.\vec{v} > 0$),

On dit que le mouvement est uniformément retardé si ($\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$).

* Le poids d'un corps:

C'esr la force d'attraction exercée par la terre sur ce corps. Si on considère que la terre est un référentiel galiléén. La force d'attraction mesuré sur la terre.

$$\vec{P} = \vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}.\vec{e}_z$$

$$si \quad R = r \to P = \frac{-GmM}{R^2}.\vec{e}_z$$

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

donc le poids est un champ de force uniforme

* Chute libre:

Un corps est en chute libre lorsqu'il se déplace seulement sous l'effet de son poids.

$$\vec{P} = m\vec{\gamma} = -mg.\vec{e}_z \qquad \vec{\gamma} = -g.\vec{e}_z$$

Dans un mouvement en chute libre, la masse n'intevient pas.

* Projectile:

chute libre
$$\vec{P} = -mg.\vec{e}_z$$
$$m\vec{\gamma} = -mg.\vec{e}_z$$

à $t = 0$ projectile en 0 , $OM = 0$; $\vec{v} = \vec{v}_0$

$$m\vec{\gamma}=-mg.\vec{e_z}\rightarrow m\vec{v}=-mgt.\vec{e_z}+m\vec{v_0}$$
$$\overrightarrow{OM}=(-gt^2/2).\vec{e_z}+\vec{v_0}t\rightarrow \overrightarrow{OM} \quad est \quad dans \quad le \quad plan\, YOZ$$

Le mouvement est un mouvement plan.

Projetons $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ suivant OY et OZ

$$\begin{cases} Y=(v_0.\cos\alpha)t & M.U \\ Z=-1/2\,gt^2+v_0.\sin\alpha t & M.U.V \end{cases}$$

Calculons la vitesse suivant OZ.

$$Z=-gt+v_0.\sin\alpha$$

Z diminue au cours du temps

elle s'annule ,$Z=0\rightarrow t_1=\dfrac{v_0.\sin\alpha}{g}$

La trajectoire (Y,Z)

$$t=\frac{Y}{v_0\cos\alpha} \qquad Z=-\frac{g}{2}\frac{Y^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+\frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}Y$$

$$Z=\frac{-g}{2}.\frac{1}{v_0^2\cos^2\alpha}Y^2+Y\tan\alpha \qquad Parabole$$

OP s'appelle la portée

$$OS\begin{cases} Z=0 \\ Y=v_0.\cos\alpha\sin\alpha \\ Z=\dfrac{-gv_0^2\sin^2\alpha}{2g^2}+\dfrac{v_0^2.\sin^2\alpha}{g}=\dfrac{v_0^2.\sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

$$OP\begin{cases} X=0 \\ Y=gv_0^2.\sin 2\alpha \\ Z=0 \end{cases}$$

* **Energie potentielle:**

$$\vec{F} = -F_0 . \vec{e}_z \qquad \vec{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -F_0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\rightarrow$F dérive d'un potentiel scalaire.

$$\vec{F} = F_0 . \vec{e}_z = -\vec{grad}V = \frac{-\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \rightarrow V = V(z); \quad -F_0 = \frac{-\partial V}{\partial z}$$

$\rightarrow V(z) = +- F_0 z + cte$ c'est l'énergie potentielle

Elle est connue à une Constabte additive près.

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z \qquad F_0 = mg$$
$$V = mgz + cte$$

Cherchons la différence $V_2 - V_1$ de deux positions différentes.

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 = W_1^2 = mgz_1 - mgz_2 = mg(z_1 - z_2)$$

*<u>Mouvement dans un milieu résistant:</u>

Lorsqu'un corps se déplace dans un milieu donné, le poids n'est pas la seule force qui intervient. Le milieu exerce sur le corps une force résistante qui s'oppose au mouvement.

On l'appelle force d'amortissement. Cette force est une fonction de la vitesse pour des vitesses pratiquement faible, cette force est proportionnelle à la vitesse $\vec{f}=-C.\vec{v}$ avec $C=cte>0$,
(voir T,D projectile) $(\vec{F}=\vec{P}+\vec{f}=m\gamma)$

*** Mouvement lié:**
Un mouvement est dit lié lorsqu'il est assujetti sur une surface donnée ou une courbe donnée. Le support exerce sur l'objet une force appelée force de réaction. Lorsque le mouvement se fait sans frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale au support.

Mais souvent le support exerce sur l'objet une force de frottement. La force de frottement est la composante de $\vec{R}$ sur la direction du mouvement.

$\vec{R}$ dans ce cas n'est plus normale au support. Soit $\vec{R_N}$, la composante normale de $\vec{R}$ sur la direction normale à $\vec{f}$. Il existe une relation entre f et R_N.

$$|f|=\mu|R_N|$$

μ coefficient de frottement. Il dépend de la nature de l'objet et de son support.

* <u>Cas lié sans frottement</u>: (voir T, D)

* <u>Cas lié avec frottement:</u>

Considérons un point matériel sur un plan incliné qui exerce une force de frottement à l'instant $t=0$.

Le point matériel se trouve au sommet à la distance $OS=l$;
il est lâché sans vitesse initiale c.à.d $V(t=0)=0$

Faisons l'inventaire des forces à l'instant t quelconque, le point matériel est soumis à son poids et la réaction du support.

Comme le mouvement se fait avec frottement, $\vec{R}$ n'est pas $\perp$ au déplacement.

$$|f| = \mu |R_N| \qquad \vec{F} = \vec{R} + \vec{P} = m\vec{\gamma}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x}; \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{e_x}; \quad \vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{e_x}$$

$$\vec{P} = -mg.\cos\alpha.\vec{e_y} - mg.\sin\alpha.\vec{e_x}$$
$$\vec{R} = (|f|\vec{e_x} + |R_N|\vec{e_y})$$
$$\vec{F} = (-mg.\sin\alpha + \mu R_N)\vec{e_x} + (-mg.\cos\alpha + |R_N|)\vec{e_y} = m\ddot{x}.\vec{e_x}$$

$$\begin{cases} -mg.\sin\alpha + \mu|R_N| = m\ddot{x} & (1) \\ |R_N| = mg.\cos\alpha & (2) \end{cases}$$

En reportant (2) dans (1), on a

$$-mg.\sin\alpha + \mu mg.\cos\alpha = m\ddot{x}$$
$$x = g[\mu.\cos\alpha - \sin\alpha] = cte$$
$$\ddot{x} = 0 \rightarrow \mu = \tan\alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g(\mu.\cos\alpha - \sin\alpha)$$

en intégrant, on obtient:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = g(\mu.\cos\alpha - \sin\alpha)t + cte$$
$$x = \frac{gt^2}{2}(\mu.\cos\alpha - \mu.\sin\alpha) + cte \rightarrow cte = l$$
$$x = l - \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)$$